ANALIZA FUNKCJONALNA I TOPOLOGIA

Lista 3 - Twierdzenie Hahna-Banacha

1. Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem zespolonym i niech φ będzie zespolonym funkcjonałem liniowym na X. Traktując X jako przestrzeń liniową nad ciałem rzeczywistym, pokazać że

   (a) funkcjonały $\varphi_1(x) = \mathrm{Re}\varphi(x)$ oraz $\varphi_2(x) = \mathrm{Im}\varphi(x)$, gdzie $x \in X$, są rzeczywistymi funkcjonałami liniowymi,

   (b) $\varphi(x) = \varphi_1(x) - i\varphi_1(ix) = \varphi_2(ix) + i\varphi_2(x)$ dla $x \in X$,

   (c) jeżeli X jest unormowana i φ jest ograniczony, to φ_1, φ_2 są ograniczone oraz $\| \varphi \| = \| \varphi_1 \| = \| \varphi_2 \|$.

2. Niech X będzie przestrzenią liniową nad ciałem $\mathbb{C}$ i niech $p : X \to [0, \infty)$ będzie półnormą. Pokazać, że jeżeli Y jest popdrzestrzenią liniową przestrzeni X oraz funkcjonał $\varphi \in Y^*$ spełnia nierówność

$$|\varphi(y)| \leq p(y)$$

   dla $y \in Y$, to istnieje rozszerzenie $\Phi \in X^*$, takie, że powyższa nierówność zachodzi na całej X. Jest to *zespolona wersja lematu Hahna-Banacha.* W tym celu pokazać fakty podane niżej.

   (a) Korzystając z zadania 1, zauważyć, że wzór $\psi(y) = \mathrm{Re}\varphi(y)$, gdzie $y \in Y$, definiuje rzeczywisty funkcjonał liniowy na Y, taki że

$$-\psi(iy) = \mathrm{Im}\varphi(y)$$

   oraz

$$\varphi(y) = \psi(y) - i\psi(iy).$$

   (b) Uzasadnić, że zachodzi nierówność $|\psi(y)| \leq p(y)$ dla $y \in Y$.

   (c) Korzystając z rzeczywistej wersji lematu Hahna-Banacha, wykazać, że istnieje rozszerzenie $\Psi \in X^*$, takie że

$$\Psi(x) \leq p(x) \quad \text{oraz} \quad |\Psi(x)| \leq p(x)$$

   gdzie $x \in X$.

   (d) Pokazać, że funkcjonał zdefiniowany wzorem

$$\Phi(x) = \Psi(x) - i\Psi(ix)$$

   gdzie $x \in X$, jest zespolonym funkcjonałem liniowym i że jest on rozszerzeniem φ.

   (e) Uzasadnić, że

$$|\Phi(x)| \leq p(x)$$

   dla $x \in X$.

3. Pokazać, że jeżeli wektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$ są liniowo niezależne w unormowanej przestrzeni liniowej X nad ciałem $\mathbb{C}$ oraz $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$, to istnieje $\varphi \in X^*$, taki że $\varphi(x_k) = c_k$ dla każdego k.

4. Wyznaczyć funkcjonał Minkowskiego dla otwartego koła o promieniu 1 i środku w zerze oraz otwartego kwadratu o boku 2 i środku w zerze na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.

5. Uzasadnić, że jeżeli A jest zbiorem wypukłym w UPL X, to zbiór postaci

$$A_\epsilon = A + B(0,\epsilon) := \{x + \xi : x \in A, \xi \in B(0,\epsilon)\}$$

gdzie $\epsilon > 0$, a $B(0,\epsilon)$ to kulka otwarta o promieniu ϵ, jest zbiorem otwartym i wypukłym.

6. Korzystając z zadania poprzedniego, uzasadnić, że jeżeli A, B są niepustymi zbiorami rozłącznymi w UPL X, przy czym A jest domknięty, a B jest zwarty, to istnieje $\epsilon > 0$, taki, że $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$.

7. Stosując geometryczne twierdzenie Hahna-Banacha, wywnioskować, że jeżeli A, B są niepustymi zbiorami rozłączymi w UPL X, przy czym A jest domknięty, a B jest zwarty, to istnieje hiperpłaszczyzna H, która ściśle rozdziela A oraz B. Jest to tzw *Drugie Geometryczne Twierdzenie Hahna-Banacha.*

R. Lenczewski